

# 代数 1

## 完整课程大纲

*Illustrative Mathematics*® 9-12 AGA (v.360)

8 单元 • 单元目标 • 部分目标 • 逐课大纲

来源: <https://accessim.org/9-12-aga/algebra-1?a=teacher>

已授权 CC BY-NC 4.0 • © Illustrative Mathematics

# 课程概览

Illustrative Mathematics 9-12 AGA 课程的代数 1 被组织为 8 单元。学生从一变量统计开始，然后通过对情境中的关系进行建模来研究线性方程和系统。他们使用二变量统计检查变量之间的关系，然后求解并绘制线性不等式和线性不等式系统。学生通过函数符号、定义域和值域、平均变化率和图的特征，遇到线性函数及其反函数、分段函数和绝对值函数、指数函数和二次函数，加深对函数的理解。本课程以二次方程单元结束，学生在其中推理解决方案、编写等效的方程、完成平方并应用二次公式。

单元顺序为：

- 单位 1：一变量统计
- 单元 2：线性方程和系统
- 单位 3：二变量统计
- 单元 4：线性不等式和系统
- 单元 5：函数
- 单元 6：指数函数简介
- 单元 7：二次函数简介
- 单元 8：二次方程

每个单元都分为字母部分（A、B、C、D、E、F（如适用）），每个部分都是一系列日常课程。可选课程已注明。

# 单位 1：一变量统计

## 单元学习目标

学生使用平均值、中位数、四分位距 和 标准差 等统计数据收集、显示和分析数据。

## 单元说明

在本单元中，学生使用统计数据（例如平均值、中位数、四分位距 和 标准差）收集、显示和分析数据。在 6–8 年级，学生使用直方图、点图和箱线图来汇总数据，并使用中心的基本度量（平均值和 中位数）以及变异性度量（平均绝对偏差和 四分位距）。这些概念将在本单元的前两节中重新讨论，但重点是解释以及它们向构建数据显示的机制揭示 加法 中的数据的内容。可选的第三部分可帮助学生熟悉用于计算统计数据（例如平均值、中位数、四分位数和 标准差）以及创建数据显示的电子表格和技术。第四部分介绍了使用标准差 和异常值解释数据的其他方法。学生通过使用这些工具使用中心测量和变异性测量来比较相关数据集来完成本单元。最后一课让学生有机会通过提出统计问题、设计实验、收集数据和分析数据来练习技能。由于本单元的前半部分主要回顾中学的材料，因此本单元不包括单元中评估。冷静期和检查点可用于监控学生的理解情况。在此单元中，仅使用总体 标准差。示例 标准差 将在后面的课程中介绍。

## A 部分：了解您

### 本节学习目标

- 创建和解释数据显示，例如点图、直方图和箱线图。

### 本节说明

在代数 1 的第一部分中，学生开始通过收集同学的数据、对他们可能收集的不同类型的数据进行分类以及创建他们收集的信息的显示来建立社区。可选的第二课让学生有机会练习使用给定数据创建点图、直方图和箱线图，然后再尝试对收集的数据执行相同操作。本课程将是一个介绍班级将用于创建这些显示器的任何技术工具的机会。本部分有意为学生提供额外的时间来学习新的惯例并建立课程规范。

### 课时

1. 了解您 — 让我们一起收集数据并探索统计问题。
2. 数据表示（可选） - 让我们使用点图、直方图和箱线图来表示和分析数据。
3. 数据库——让我们制作、比较和解释数据显示。

## B 节：分布形状

### 本节学习目标

- 描述分布的形状，包括中心度量和变异性度量。

### 本节说明

学生们努力使用“对称”、“倾斜”、“均匀”、“双峰”和“钟形”等术语来描述数据的分布。其中包括一门可选课程，以提醒学生之前学习过中心度和变异度，以便这些术语可以包含在分布描述中。即使跳过可选课程，也可以考虑创建一个有关中心和变异性度量的显示，就像本课程综合中提到的那样。

课时

1. 分布的形状——让我们探索数据并描述分布。
2. 计算中心度和变异性（可选）- 让我们计算中心度和变异性度量，并了解哪些最适合数据。

## C 部分：如何使用电子表格

本节学习目标

- 使用电子表格作为快速计算值的工具。

本节说明

在这个可选部分中，学生将了解如何使用电子表格创建基本公式并解释结果。假设学生对电子表格一无所知。如果学生熟练使用电子表格作为计算工具，则可以安全地跳过这一系列课程。该技术对于解释本单元中的数据非常有用，也可用于检查后续单元中的函数。由于整个部分都是可选的，因此不包含检查点问题。

课时

1. 神秘计算（可选）——让我们探索一下电子表格。
2. 电子表格计算（可选）- 让我们使用电子表格作为计算器。
3. 电子表格快捷方式（可选）- 让我们探索电子表格中的递归公式。

## D 节：操作数据

本节学习目标

- 描述异常值对数据分布的影响。
- 将标准差视为变异性的衡量标准。

本节说明

在本节中，向学生介绍用于分析数据的其他工具，例如 标准差 和异常值。他们通过使用所有这些工具来比较类似的数据集来完成本节。请注意，在本单元中，所有标准差均指总体 标准差 计算而不是样本 标准差。如果学生使用 GeoGebra 或数学工具中的电子表格工具创建 直方图，则当最大值位于最大间隔的边界时会出现问题。在这种情况下，GeoGebra 包含前一个间隔的最大值，而不是遵循为下一个间隔创建新 条形 的约定。如果学生正在使用这些工具，请与他们解决这个问题。

课时

1. 技术制图——让我们使用技术来表示数据。
2. 极端的影响——让我们看看统计数据如何随数据变化。

3. 比较和对比数据分布——让我们使用数据显示和汇总统计来研究变异性。
4. 标准差 — 让我们了解一下 标准差，这是另一种变异性度量。
5. 更多标准差——我们继续解读标准差。
6. 异常值——让我们研究一下异常值以及如何处理它们。
7. 比较数据集——让我们比较一下数据集的统计数据。

## E 部分：让我们付诸实践

### 本节说明

本单元的最后一部分是学生有机会在整个单元中应用他们的想法的课程。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

### 课时

1. 分析数据——让我们通过分析数据、比较和对比它们的分布形状以及中心和变异性的度量来回答统计问题。

## 单元 2：线性方程和系统

### 单元学习目标

学生研究线性方程和线性方程组的求解和绘图。

### 单元说明

在本单元中，学生将研究求解和绘制线性方程以及线性方程系统。该单元建立在中学学习的基础上，当时学生使用变量编写方程，使用分配律等有效动作操作方程，并使用图形和替换解决线性方程的基本系统。在第一部分中，学生回忆用方程来表示情况。在第二部分中，他们使用有效的移动来编写等效的方程，可用于求解未知值或隔离变量。第三部分使用图、变量替换和消除变量检查方程的求解系统。学生利用他们对编写等效方程的理解来理解为什么每种方法都可以找到解决方案。

## A 部分：用方程编写和建模

### 本节学习目标

- 解释一变量和二变量方程的解。
- 认识到两个变量中的一次方程的图形表示作为方程的解的所有值对。
- 用数字和变量编写方程来描述关系和约束。

### 本节说明

在本节中，学生回忆如何在变化或数量未知的情况下编写表达式和方程。他们首先使用适合情况的自定义变量和约束对情况进行建模。然后，他们使用表格来检查值的模式并使用它们来编写方程。他们回忆起一个值作为方程的解意味着什么，然后绘制方程的图表来查看几个解。使用“检查您的准备情况”来评估学生对操作表达式和方程的理解程度。如果有充分的理解，请随意快速学习可选课程或跳过它们以节省时间。

### 课时

1. 规划一场聚会——让我们编写表达式来估算一场聚会的费用。
2. 将方程写入模型关系（1 部分）（可选）— 让我们看看方程如何帮助我们描述关系和约束。
3. 将方程写入模型关系（2 部分）- 让我们使用模式来帮助我们编写方程。
4. 方程及其解决方案（可选）——让我们回顾一下我们对方程解决方案的了解。
5. 方程及其图表（可选）- 让我们用两个变量绘制方程的图表。

## B 部分：操纵方程并理解其结构

### 本节学习目标

- 利用结构或重新排列方程，确定线性方程图形的斜率和垂直截距。
- 重新排列多变量方程以突出显示特定数量。
- 认识到“等价方程”是具有完全相同解的方程，并且多个等价方程可以表示相同的关系。

### 本节说明

在本节中，学生使用等效的方程来求解变量。最初，学生求解方程以获得未知量，然后根据另一个变量求解一个变量，以重新解释情况并更有效地找到值。然后，学生以标准形式和斜率截距形式在图和方程之间建立更紧密的联系。

### 课时

1. 等效方程 — 让我们研究一下是什么使两个方程等效。
2. 解释重写方程的步骤——让我们思考一下为什么重写方程的某些步骤是有效的，但其他步骤却无效。
3. 要解决哪个变量？（1 部分）- 让我们重新排列方程以确定一定的数量。
4. 要解决哪个变量？（2 部分）— 让我们求解其中一个变量的方程。
5. 将方程连接到图（1 部分）——让我们研究一下哪些图可以告诉我们有关方程及其代表的关系。
6. 将方程连接到图形（2 部分）- 让我们分析线性方程的不同形式以及这些形式与其图形的关系。

## C部分：二变量线性方程组

### 本节学习目标

- 通过分析其结构或通过绘图来确定方程系统是否有 0、1 或无穷多个解。
- 使用消除或替换创建一个或多个等效系统来帮助解决原始系统。

### 本节说明

在本节中，学生将重新审视方程系统并开发用于查找任何解决方案的代数方法。在早期年级，学生使用图表和替换方法探索求解系统。在加法中，为了重新审视这些概念，学生使用他们在前面几节中学到的有关编写等效方程的知识，通过使用消除方法来求解系统。在图表上查看系统的解决方案后，学生使用替换法和消除法来求解系统。他们发现等效的方程具有不同的图，但继续与系统解中的其他图相交。本节的最后一课以图形和代数的方式探讨了无解或有无限多个解的线性系统。

### 课时

1. 线性方程的书写和图形系统 — 让我们回顾一下求解线性方程系统意味着什么以及如何通过图形来完成它。
2. 通过替换来求解系统 - 让我们使用替换来求解线性方程系统。

3. 通过消除法求解系统（1 部分）——让我们研究一下加或减 方程 如何帮助我们求解线性 方程 系统。
4. 通过消除法求解系统（2 部分）——让我们思考为什么加减 方程 可以解决线性 方程 的系统。
5. 通过消除法求解系统（3 部分）— 让我们了解如何将 方程 乘以一个因子来帮助我们求解线性 方程 系统。
6. 线性 方程 系统及其解 — 让我们看看 方程 系统可以有多少个解。

## D 部分：让我们付诸实践

### 本节说明

在最后一部分，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。因为这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，所以没有部分目标或检查点问题。

### 课时

1. 询问求解系统（可选）——让我们找出一些系统。
2. 线性模式（可选）——让我们绘制图表并探索形成模式的系统。

## 单位 3：二变量统计

### 单元学习目标

学生使用统计方法寻找双变量数据中的关联，使用双向表、散点图、最佳拟合线、残差和相关性系数。

### 单元说明

在本单元中，学生使用统计方法来寻找双变量数据中的关联。该单元首先让学生分析双向表中排列的分类数据。学生使用这些分类变量组合的相对频率来检查数据中任何关联的证据。然后，该单元转换为双变量数值数据，并使用散点图和最佳拟合线进行可视化。学生使用技术来计算最佳拟合线并观察线性模型与数据的匹配程度。残差和相关性系数用于量化线性模型的拟合优度。本单元以探索相关性和因果关系之间的差异作为结束，这也是将所学知识应用到感兴趣的几何领域（例如人类学和体育）的机会。在 8 年级，学生非正式地构建散点图和拟合线，注意到线性模式，并使用双向表观察分类数据中的关联。在本单元中，学生将基于先前的知识，通过使用残差以及最佳拟合线的相关性系数（使用技术发现）来评估线性模型与数据的匹配程度。通过在上下文中解释斜率和线性模型的截距以及使用模型在给定有关另一个变量的信息的情况下预测一个变量，我们有机会练习上一单元中的概念。

## A 部分：双向表

### 本节学习目标

- 根据双向表中给出的信息或有关情况的信息创建相对频率表。
- 检查相对频率表和双向表中的模式，以确定两个感兴趣的变量之间是否存在可能的关联。

### 本节说明

本节重点介绍使用双向表解释分类数据。首先，学生回忆 8 年级如何解释双向表中的值。然后，他们通过创建相对频率表来扩展他们的理解，并使用这些表来寻找变量之间的关联。

### 课时

1. 双向表——让我们看一下分类数据。
2. 相对频率表——让我们找到分类数据的相对频率。
3. 分类数据中的关联——让我们寻找分类变量之间的关系。

## B 节：散点图

### 本节学习目标

- 理解残差、变异性以及使用线性模型是否合适之间的联系。
- 解释某种情况下线性模型的变化率和垂直截距。

### 本节说明

在本节中，学生将重点关注线性模型及其对数据的拟合程度。第一课通过理解斜率和上下文中的截距并展示如何从模型预测附加值，激发了线性模型的重要性。接下来的两节课是关于非正式评估如何获得线性模型。学生从给定模型之间进行选择，到估计自己的模型，再到使用技术来找到最适合的线。然后，他们使用残差来更定量地了解线性模型对数据的拟合程度。

### 课时

1. 线性模型——让我们探索两个数值变量之间的关系。
2. 拟合线——让我们找到一些数据的最佳线性模型。
3. 残差——让我们检查一下数据与线性模型的接近程度。

## C 节：相关系数

### 本节学习目标

- 基于相关性系数描述变量之间关系的强度和符号。
- 研究两个变量之间的关系以分析该关系是否为因果关系。

### 本节说明

在本节中，学生将更深入地研究两个变量之间的关系。特别是，他们使用相关性系数将关系分类为强或弱以及正或负。然后，他们利用对情况的理解来表明这种关系是因果关系还是仅仅是相关性。

### 课时

1. 相关性系数——让我们看看线性模型对于某些数据有多好。
2. 使用相关性系数——让我们仔细看看相关性系数。
3. 因果关系——让我们仔细看看相关变量。

## D 部分：让我们付诸实践

### 本节说明

在最后一部分，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

### 课时

1. 化石和旗帜（可选）——让我们收集一些数据并进行分析。

## 单元 4：线性不等式和系统

### 单元学习目标

学生研究求解和绘制线性不等式和线性不等式系统。

### 单元说明

在本单元中，学生将研究求解和绘制线性不等式以及线性不等式系统。该单元以中学概念为基础，当时学生通过数量推理来编写和解决不等式。它进一步建立在早期单元的概念之上，其中学生通过编写等效的方程来求解线性方程和方程系统。首先，学生求解一个变量中的线性不等式，并通过编写等效的不等式将解绘制在数轴上。在第二部分中，他们通过查看相关的方程、将其绘制在坐标平面上并测试线两侧的点来确定解区域，从而求解具有两个变量的线性不等式。第三部分是关于求解线性不等式系统，考虑多个线性不等式作为情况条件，并找到满足所有不等式的解区域。

## A 部分：一个变量的线性不等式

### 本节学习目标

- 使用相关方程求解一个变量的不等式。
- 在一个变量中编写并求解不等式，以表示情况中的约束并解决问题。

### 本节说明

在本节中，学生将求解一个变量中的线性不等式。他们首先将情况的约束编写为不等式，然后通过编写等效的不等式并推理数量来解决它们。他们通过检查不等式上下文隐含的约束（例如要求变量为正）来完成本节。本节的大部分工作都回顾了中学的概念，但本单元中的推理建立在学生在早期单元中使用方程所做的工作的基础上。根据学生用一个变量求解不等式的熟练程度，本节可以快速完成，也可以花额外的时间进行几个可选活动，以用于额外练习求解不等式。

### 课时

1. 用不等式表示情况 — 让我们使用不等式来表示情况中的约束。
2. 一个变量中不等式的解 — 让我们查找并解释一个变量中不等式的解。
3. 在一个变量中编写和求解不等式 — 让我们通过在一个变量中编写和求解不等式来解决问题。

## 第 B 节：两个变量的线性不等式

### 本节学习目标

- 了解两个变量的约束可以用不等式、图（半平面）和口头描述来表示。

- 将不等式 写在两个变量中表示某种情况下的约束，并使用技术绘制解决方案集以回答有关该情况的问题。

#### 本节说明

在本节中，学生将使用具有两个变量的不等式。他们首先考虑这种类型的不等式的解意味着什么，然后认识到，在图上，解占据由与原始不等式相关的一次方程界定的区域。这种理解用于绘制 2 变量不等式的解区域——首先绘制与不等式相关的方程，然后通过测试点来找到解区域。最初，学生们手动完成这个过程，但后来他们被介绍使用图形技术来加速这个过程。

#### 课时

1. 绘制两个变量中的线性不等式（1 部分）— 让我们了解如何使用图形来表示两个变量中的不等式的解。
2. 在两个变量中绘制线性不等式（2 部分）- 让我们用两个变量编写不等式，并通过推理和绘图来理解解决方案。
3. 使用不等式解决两个变量的问题 — 让我们练习用两个变量编写、解释和绘制不等式的解决方案。

## 第 C 节：二元线性不等式组

#### 本节学习目标

- 给定一个不等式系统及其图，解释如何判断一对值是否是该系统的解。
- 了解两个变量中的不等式系统的解集由使不等式都成立的任何一对值组成，并且它由图形重叠的区域以图形方式表示。

#### 本节说明

本节将不等式的探索扩展到包括系统。学生首先将不等式系统的解解释为同时满足所有约束的值。然后，他们绘制不等式图表，将系统的解决方案区域可视化为各个不等式解决方案区域的重叠部分。在本单元的可选最后一课中，学生使用线性不等式系统对情况进行数学建模，并探索该环境下的解决方案。

#### 课时

1. 双变量线性不等式系统的解 — 让我们看看必须同时满足两个约束（可以用不等式表示）的情况。
2. 用二变量线性不等式系统解决问题 — 让我们使用不等式系统来解决一些问题。
3. 使用两个变量的不等式系统进行建模 — 让我们使用不等式系统创建数学模型。

## 单元 5：函数

### 单元学习目标

学生通过使用函数符号、图形特征、定义域和范围、分段函数和绝对值函数以及反函数，扩展和加深对函数的理解。

### 单元说明

在本单元中，学生扩展并加深对函数的理解。他们首先回顾之前在 8 年级中看到的函数定义（为每个输入精确分配一个输出的规则），然后熟悉函数符号并使用它来比较和分析函数、编写函数规则以及求解输入或输出。然后，学生探索函数图来描述“最大值”、“最小值”、“截距”、“增加”、“减少”和“平均变化率”等特征，并将图形与现实生活情况联系起来。他们利用情境来讨论函数的定义域和值域，并理解分段定义的函数。特别是，学生将研究绝对值函数及其一些基本变换。随后，学生探索线性函数的反函数，作为在输出值已知时查找相应输入值的方法。在整个单元中，学生有机会对现实世界的情况进行数学建模。

## A 部分：函数及其表示

### 本节学习目标

- 给定函数符号中的语句，绘制函数图。
- 了解如果每个输入只有一个可能的输出，则两个量之间的关系是一个函数。
- 使用函数符号编写表示规则的方程。

### 本节说明

在本节中，学生将回忆函数的定义，即为每个输入分配不超过一个输出的规则。然后，他们使用函数符号来描述现实世界中的规则，并了解符号如何区分输入和输出值。

### 课时

1. 描述和绘制情况——让我们看看我们周围的一些有趣的函数并尝试描述它们！
2. 函数表示法——让我们了解一种引用和讨论函数的便捷方法。
3. 解释和使用函数符号——让我们使用函数符号来讨论函数。
4. 使用函数表示法来描述规则（1 部分）——让我们使用函数表示法来描述规则。
5. 使用函数符号来描述规则（2 部分）——让我们绘制图表并找出一些函数的值。

## B 部分：分析和创建函数图

### 本节学习目标

- 给定函数图，估计或计算指定间隔内的平均变化率。

- 根据情况解释图形的关键特征——函数增加或减少时的截距、最大值、最小值和间隔。
- 解释有关用函数符号编写的两个或多个函数的语句。

#### 本节说明

在本节中，学生分析包括特殊特征的函数图，例如“最大值”、“最小值”、“截距”和“平均变化率”。它们在现实生活情况的描述和模拟这些情况的函数图之间建立了联系。然后他们使用图表和函数符号来比较情况。

#### 课时

1. 图的特征——让我们使用函数图来了解情况。
2. 使用图表查找平均变化率——让我们测量一下函数输出变化的速度。
3. 解释和创建图表——让我们绘制图表来表示情况。
4. 比较图表——让我们比较函数图表来了解它们所代表的情况。

## C 部分：仔细观察输入和输出

#### 本节学习目标

- 解释用文字或函数符号描述的绝对值函数，并创建值表和图表来表示该函数。
- 解释分段函数的图形或其以函数符号表示的规则，并根据情况解释规则（口头和书面）。
- 了解函数的域是所有可能输入的集合，范围是所有可能输出的集合。

#### 本节说明

在本节中，学生重点关注各种函数的域和范围。域和值域的语言使学生能够更好地理解分段函数，其中不同的规则适用于域的不同部分。特别是，学生通过确定猜测与实际值的差距的情况来探索绝对值函数。

#### 课时

1. 域和范围（1 部分）——让我们找到函数的所有可能的输入和输出。
2. 定义域和值域（2 部分）——让我们分析函数图以了解它们的定义域和值域。
3. 分段函数——让我们看看分段定义的函数。
4. 绝对值函数（1 部分）——让我们做一些猜测，看看它们有多好。
5. 绝对值函数（2 部分）——让我们将距离作为一个函数来研究。

## D 节：反函数

#### 本节学习目标

- 通过求解输入变量的方程来找到一次函数的逆。
- 编写一次函数和反函数来建模数据并解决问题。

### 本节说明

在本节中，学生将使用反函数来查找与已知输出值相对应的输入值。最初，学生使用编写密码的想法来激发寻找产生给定输出的输入的需求。然后，为他们提供上下文，在这些上下文中，当已知几种不同的输出（例如货币或温标之间的转换）时，可以有效地使用逆来查找输入。

### 课时

1. 反函数——让我们向前和向后定义函数。
2. 查找和解释反函数——让我们找到线性函数的反函数。
3. 编写反函数来解决问题——让我们使用反函数来解决问题。

## E 部分：让我们付诸实践

### 本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

### 课时

1. 使用函数对电池电量进行建模——让我们使用函数对数据进行建模并进行预测。

## 单元 6：指数函数简介

### 单元学习目标

学生基于对线性函数、指数 的性质和 百分比 变化的理解，探索指数关系，编写指数函数并绘制图表，并将其与线性函数进行比较。

### 单元说明

在本单元中，学生将基于对线性函数、指数 属性和 百分比 变化的理解来探索指数关系。学生了解到指数关系的特点是等间隔内的常数商，并将其与线性关系进行比较，线性关系的特点是等间隔内的常数差。他们遇到的环境呈指数级变化。这些背景以口头方式并通过表格和图表呈现。他们构建 方程 并用它们来模拟情况并解决问题。首先，学生在不使用函数符号和语言的情况下研究这些指数关系，以便他们可以专注于了解指数关系的关键属性和特征。随后，学生将这些关系视为函数，并使用函数的符号和术语。他们根据指数函数所代表的上下文和不代表特定上下文的抽象函数来研究指数函数图，观察不同参数值对图的影响。本单元早期使用的上下文导致域为 整数 的函数。在某些情况下，学生将使用图形解释 指数 中带分数值的指数表达式，但与根或对数的连接留到以后的课程中。材料注意事项：

在本单元中，学生应该可以使用带有 指数 按钮的计算器。对于某些活动来说，使用绘图技术是必要的，并且整个单元都鼓励使用绘图技术。

### A 部分：关注增长

#### 本节学习目标

- 通过执行计算来比较线性和指数关系。
- 描述表中表示线性和指数关系的模式。

#### 本节说明

在本节中，学生开始探索指数函数。他们考虑以公因数增加的数字模式，并将它们与以公差增加的模式进行比较。这就需要一种用指数表达式来描述这些非线性模式的方法。

#### 课时

1. 不断成长——让我们选择更好的交易。
2. 增长模式——让我们比较一下不同的增长模式。

### B部分：一种新型关系

#### 本节学习目标

- 解释方程中代表指数增长或衰减的负指数。
- 写一个方程来表示随增长因子变化的量。
- 编写并绘制一个表示指数衰减的方程来解决问题。

## 本节说明

在本节中，学生编写表达式来表示指数增长。他们利用了生长因子 指数 和重复 乘法 的特性。通过查看 0 和 1 之间的增长因子并使用分布属性重写表达式，向他们介绍了以指数方式减少的模式。在本节后面，学生将检查指数模式和模式图，以考虑负 指数 在上下文中的含义。学生必须依靠在 8 年级首次开发的 指数 属性，来对负 指数 形成一致的理解。在整个部分中，学生将继续在情况描述、数值表、图表和表示指数变化的表达式或 方程 之间建立联系。

## 课时

1. 代表指数增长——让我们探索指数增长。
2. 表示指数衰减——让我们考虑一下如何展示和讨论指数衰减。
3. 理解衰减——让我们看看指数衰减。
4. 分析图表——让我们比较一下数量呈指数变化的情况。
5. 使用负 指数 — 让我们更仔细地看看指数图和 方程。

## C 部分：指数函数

### 本节学习目标

- 描述更改参数对表示 指数函数 的图形的影响。
- 使用函数符号编写表示指数关系的方程。

## 本节说明

在本节中，学生开始将指数关系写成函数。他们重新审视函数符号并应用与函数相关的语言，例如因变量和自变量。他们还考虑了指数背景下的平均变化率，并得出结论，与使用线性函数相比，这些度量对函数的代表性较差。随后，学生检查参数对形式函数的影响，并应用该影响对呈指数变化的情况进行数学建模。本节的最后一课是可选的，提供了探索函数中参数的额外练习。

## 课时

1. 指数情况作为函数——让我们探索指数函数。
2. 解释指数函数——让我们找到一些有意义的方法来表示指数函数。
3. 查看变化率 — 让我们计算指数函数的平均变化率。
4. 建模指数行为——让我们使用指数函数来模拟现实生活中的情况。
5. 指数图的推理（1 部分）——我们来研究和比较方程和指数函数图。
6. 关于指数图的推理（2 部分）（可选）——让我们研究一下我们可以从表示指数函数的图中学到什么。

## D 节：增长和衰退百分比

### 本节学习目标

- 计算相同初始余额和利率但以不同时间间隔复利的重复 百分比 增加的结果。
- 证明为什么应用 百分比 增加  $n$  倍不等于应用 百分比  $n$  倍。

#### 本节说明

在本节中，学生检查重复的 百分比 变化并将其与指数函数联系起来。他们首先回顾 百分比 更改，然后探索在相等的时间间隔内重复 百分比 更改的情况。然后学生研究复利以及不同的复利间隔如何影响最终值。他们还编写等效的指数表达式来比较不同时间间隔内的增长或衰减。

#### 课时

1. 调用 百分比 更改（可选） - 让我们查找通过 百分比 更改数字的结果。
2. 涉及 百分比 更改的函数 — 让我们研究一下当我们对某个数量重复应用 百分比 增加时会发生什么。
3. 复利 — 让我们探索重复应用 百分比 增加的不同方法。
4. 不同的复利间隔 — 让我们看看当我们以不同的时间间隔重复应用相同的 百分比 增加时会发生什么。
5. 以不同的方式表达——让我们用不同的方式编写指数表达式。

### E 部分：比较线性函数和指数函数

#### 本节学习目标

- 使用变化率并证明，对于自变量的任何相等间隔，指数函数 总是以相等的因子增加或减少。
- 使用表格、计算和图表来比较线性函数和指数函数的增长率。

#### 本节说明

在本节中，学生重新审视线性变化和指数变化之间的比较，现在重点关注函数。他们发现指数函数最终比线性函数增长得更快。他们还证明，线性函数在任何相隔 1 单位的 2 输入之间具有恒定的差值，而指数函数在任何相隔 1 单位的 2 输入之间具有恒定的 比。

#### 课时

1. 哪一个变化更快？ — 让我们比较一下线性函数和指数函数的持续增长情况。
2. 等间隔内的变化——让我们探讨线性函数和指数函数如何在等间隔内变化。

### F 部分：让我们付诸实践

#### 本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

课时

1. 预测人口——让我们使用线性和指数模型来表示和理解人口变化。

## 单元7：二次函数简介

### 单元学习目标

学生观察二次增长的模式，将二次增长与线性和指数增长进行对比，并检查二次函数的标准形式、因子形式和顶点形式。

### 单元说明

在学习本单元之前，学生已经研究了函数关系的含义、使用函数符号，并研究了线性函数和指数函数。在本单元中，他们研究了一些二次增长的模式，并将这种增长与线性和指数增长进行对比。他们进一步观察到，最终这些二次模式比线性模式增长得更快，但比指数模式增长更慢。学生研究自由落体物体的重要示例，其随时间变化的高度可以用二次函数建模。他们使用表格、图表和方程来描述这些物体的运动，最终观察弹丸向上发射的情况。他们解释了本文中每个术语的含义，并努力理解系数如何影响图表的形状。还介绍了其他情况，例如收入和面积。接下来，学生检查二次函数的标准形式、因子形式和顶点形式。他们认识到可以从每种形式中轻松获得有关图表的哪些信息，以及每种形式中的不同值如何影响图表。特别是，他们开始概括水平和垂直平移以及图形的垂直和水平拉伸如何与修改函数的方程相关的想法。

## A 部分：不同类型的变革

### 本节学习目标

- 理解“二次关系”可以用平方项来表达。
- 确定并解释视觉模式是否表示线性、指数或二次关系。

### 本节说明

在本节中，向学生介绍二次增长的模式。他们将这些新模式与早期单元的线性和指数模式进行比较，并认识到需要一种新型关系。他们使用具有给定周长的矩形几何区域和随着每一步呈二次方增长的视觉模式，并使用表格、图表和表达式来描述关系。在整个部分中都有机会使用技术来解决问题。如果可能，请提供这些工具，以便学生可以专注于模式本身，而不是计算或可视化。

### 课时

1. 一种不同的变化——让我们找到面积最大的矩形。
2. 它如何改变？— 让我们描述一些变化模式。

## B部分：二次函数

### 本节学习目标

- 给定表达式和图形，解释表示物理现象的二次函数。

- 使用图形、表格和计算来表明指数函数最终会超越二次函数。

### 本节说明

在本节中，学生将研究函数背景下的二次关系。他们将二次函数增长与线性和指数函数增长进行了比较。他们注意到，具有正二次系数的二次函数比线性函数增长得更快，而比增长因子大于 1 的指数函数增长得更慢。然后，学生在自由落体、抛射运动和收入曲线等背景下探索二次函数。他们使用函数的结构来确定零点、截距和顶点。

### 课时

1. 从几何图案构建二次函数——让我们描述一些其他的几何图案。
2. 比较二次函数和指数函数——让我们比较二次函数和指数函数的变化，看看哪一个增长得更快。
3. 构建二次函数来描述情况（1 部分）——让我们测量下落的物体。
4. 构建二次函数来描述情况（2 部分）——让我们看看在空中发射的物体。
5. 构建二次函数来描述情况（3 部分）——让我们看看如何最大化收入。

## C 部分：使用二次表达式

### 本节学习目标

- 协调以因子形式给出的二次表达式及其图形的截距。
- 使用分配律将因式分解的等价二次表达式写成标准形式。

### 本节说明

在本节中，学生正式认识到二次表达式和函数有多种有用的形式。他们检查标准形式和分解形式，并使用分配属性来识别两种形式中的相同关系。起初，他们使用早期年级所熟悉的面积模型和类似的图表来进行分布，但鼓励他们稍后在没有图表的情况下进行工作。然后，他们将方程的不同形式的结构与图的特征（包括截距和顶点）连接起来。

### 课时

1. 等价二次表达式——让我们用图表来帮助我们重写二次表达式。
2. 标准形式和因子形式——让我们用不同的形式编写二次表达式。
3. 标准和因式形式的函数图——让我们看看标准和因式形式的二次表达式可以揭示其图的属性。

## 第 D 节：二次函数图的特征

### 本节学习目标

- 解释以标准、因式和顶点形式编写的二次表达式中的参数变化如何影响图。
- 使用顶点形式的方程来标识二次函数的最大值或最小值。

### 本节说明

在本节中，学生首先探索二次函数的因子形式和标准形式的不同参数对其图形的影响。他们认识到抛物线顶点的重要性，并引入二次表达式的顶点形式。然后，他们使用顶点形式来检查修改函数如何导致转换坐标平面中的图形。有几门选修课程可供学生更深入地探索或练习所学知识。学生以标准形式查看二次系数和二次函数线性项的效果，但对于对线性系数感到好奇的学生可以选择一门可选课程。还有一门可选的练习课可用于在上下文中重新审视二次函数，另一门练习课则涉及使用函数中的参数来确定图形是打开向上还是向下。

### 课时

1. 从因式分解形式绘图——让我们以因式分解形式绘制一些二次函数的图形。
2. 绘制标准形式的图形（1 部分）——让我们看看这些表达式中的数字如何影响它们的图形。
3. 绘制标准形式的图形（2 部分）（可选）- 让我们更改二次表达式的其他一些部分，看看它们如何影响其图形。
4. 表示情况的图表（可选）——让我们检查一下表示物体发射到空中的路径的图表。
5. 顶点形式——让我们了解一下顶点形式。
6. 从顶点形式绘制图形（可选）- 让我们以顶点形式绘制方程图形。
7. 更改顶点 - 让我们以顶点形式编写新的二次方程来生成某些图。

## 单元 8：二次方程

### 单元学习目标

学生使用因式分解、完成平方和二次公式以代数方式解释、编写和求解二次方程，并使用顶点形式求最大值和最小值。

### 单元说明

在本单元中，学生以代数方式解释、编写和求解方程。以前，学生使用表达式、表格和描述来表示二次函数。他们将图的重要特征与标准形式、因子形式和顶点形式联系起来，并将表达式扩展为标准形式。学生首先通过推理求解二次方程，无需太多代数操作。然后，他们检查使用可以以因式分解形式编写的二次方程的零积性质进行求解。他们注意到一些模式可以帮助他们以因式分解的形式重写二次表达式，并认识到并非所有的二次表达式都可以轻松分解。这促使我们寻找另一种求解二次方程的过程。学生认识到某些形式的方程的好处并形成配方法。然后，他们将这个过程推广到二次公式。在整个单元中，学生分析二次方程来认识到可能存在 0、1 或 2 解。解决方案可以是有理的、无理的或这些的组合。学生解释在不同情况下出现的解决方案。该单元最后将二次表达式从标准形式重写为顶点形式，以找到最大值和最小值，然后将他们的所有理解应用于应用问题。

## A 部分：查找未知输入

### 本节学习目标

- 写出二次方程，并根据情况推理其解。

### 本节说明

在本节中，学生将看到一些活动，这些活动激发了对更多代数方法来求解二次方程的需求。学生根据情况写出二次方程，但认识到他们没有工具来准确求解方程，除非它们采用非常具体的形式，例如等于零的因式分解形式或等于另一个完全平方的完全平方。

### 课时

1. 寻找未知输入——让我们找到一些新的方程来解决。
2. 我们何时以及为何写二次方程？— 让我们尝试求解一些二次方程。

## B 部分：求解二次方程

### 本节学习目标

- 给定一个二次表达式，创建一个因式分解的等价表达式。
- 使用因子形式和零积性质来求解二次方程。

### 本节说明

本节中，学生深入研究可写成因式乘积等于零的二次方程，正式建立对零乘积性质的理解，随后

识别模式，使他们能够将二次表达式从标准形式重写为因子形式。学生还开始认识到二次方程可以有 0、1 或 2 解。请注意，本课程仅包含一些有关将二次表达式从标准形式转换为因子形式的课程。这是故意的。目标是帮助学生从概念上了解因式分解形式，了解它可以告诉我们有关函数的信息，并在建模问题中使用这些知识，包括零不是有理数且代数因式分解无济于事的问题。过多关注因式分解的代数技能可能会掩盖这些基本概念。有时，包括在后面的课程中以及以后的课程中，表达式确实需要以因式分解的形式编写。然而，随着计算机代数系统的可用性不断提高，人们不再需要花费大量时间来学习如何手动进行因式分解。

#### 课时

1. 通过推理求解二次方程 — 让我们找到二次方程的解。
2. 求解具有零乘积性质的二次方程 — 让我们找到包含等于零乘积的方程的解。
3. 有多少解决方案？ — 让我们用图来研究有两个解、一个解或无解的二次方程。
4. 以因式分解的形式重写二次表达式（1 部分）——让我们以因式分解的形式编写表达式。
5. 以因式分解形式重写二次表达式（2 部分）——让我们以因式分解形式编写更多表达式。
6. 以因子形式重写二次表达式（3 部分）——让我们仔细看看一些特殊类型的因子。
7. 使用因子形式求解二次方程 — 让我们求解一些二次方程，在此之前，我们只能通过绘图来求解。
8. 以因子形式重写二次表达式（4 部分）- 让我们将更复杂的二次表达式转换为因子形式。

## C 部分：完成正方形

#### 本节学习目标

- 了解“加减”符号用于表示数字的两个平方根，而平方根表示法仅表示正平方根。
- 通过重新排列项并完成平方来求解二次方程。

#### 本节说明

在本节中，学生将学习完成平方作为求解二次方程的附加策略。首先，他们首先认识到二次表达式何时可以重写为完全平方，以及这种形式如何用于求解方程。然后，学生学习如何通过完成正方形将任何二次方程变成该形式。

#### 课时

1. 什么是完全平方数？ — 让我们看看完全平方如何使一些方程更容易解决。
2. 完成平方（1 部分）——让我们学习一种求解二次方程的新方法。
3. 完成平方（2 部分）——让我们求解一些更难的二次方程方程。

4. 完成平方（3 部分）——让我们完成一些更复杂表达式的平方。
5. 具有无理解的二次方程——让我们找到二次方程的精确解，即使解是无理数。

## D部分：二次公式

### 本节学习目标

- 解释有理数和无理数组合的乘积或和是有理数还是无理数。
- 使用二次公式求解二次方程。

### 本节说明

在本节中，学生将遇到二次公式。最初，将公式提供给学生，他们注意到解决方案与使用其他方法找到的解决方案相匹配。在熟悉了公式的使用后，他们检查了使用完成平方的二次公式的证明。其中包括一门可选课程，学生可以在其中分析使用二次公式遇到的常见错误。如果学生也犯类似的错误，请考虑腾出时间来参加课程。本节最后介绍了 8 级中首次遇到的有理数和无理数。在这里，他们将这些数字的各种组合的和和乘积分类为无理数或有理数。

### 课时

1. 二次公式——让我们学习一个求二次方程解的公式。
2. 应用二次公式（1 部分）——让我们使用二次公式来解决一些问题。
3. 应用二次公式（2 部分）（可选）- 让我们使用二次公式并小心求解二次方程。
4. 推导二次公式——让我们推导二次公式。
5. 有理解和无理解——让我们考虑一下求解二次方程时得到的数字类型。
6. 有理数和无理数的和与积——让我们对为什么有理数和无理数的和与积总是某些类型的数字做出令人信服的论证。

## E 节：重新审视顶点形式

### 本节学习目标

- 以顶点形式重写二次表达式，以确定表达式定义的函数的最大值或最小值。

### 本节说明

在本节中，学生将重新审视二次表达式的顶点形式。在上一单元中，学生注意到这种形式可用于轻松找到二次函数的顶点并在图上识别该点。在这里，学生利用完成平方的过程将表达式从标准形式重写为顶点形式，然后将顶点分类为最大值或最小值，并证明他们的推理。

### 课时

1. 以顶点形式重写二次表达式——让我们看看完成平方还能帮助我们做什么。
2. 使用顶点形式的二次表达式来解决问题 - 让我们找到二次函数的最大值或最小值。

## F 部分：让我们付诸实践

### 本节说明

本单元的最后一部分是学生有机会在整个单元中应用他们的想法的课程。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

### 课时

1. 使用二次方程对情况进行建模并解决问题 — 让我们分析一下由二次方程建模的情况。

## 关于本课程大纲

本课程大纲根据 accessim.org 上公开的 Illustrative Mathematics 9-12 AGA v.360 课程编制而成。单元和章节的叙述、目标和课程标题均来自教师的观点。可选课程标记为“（可选）”。源课程中引用了评估（检查点、单元中期和单元结束评估），但需要 Kendall Hunt 教育者帐户才能查看；它们不包括在这里。

<https://accessim.org/9-12-aga/algebra-1?a=teacher>