

बीजगणित 1 • इकाई 6 • मूल्यांकन मार्गदर्शिका

घातीय फलनों का परिचय

अभिभावक या शिक्षक के लिए — क्या देखें

इकाई 6 एक नए प्रकार का फलन प्रस्तुत करती है — इसके निर्गत मानों का स्थिर अनुपात (स्थिर अंतर नहीं) इसका व्यवहार निर्धारित करता है। देखें कि विद्यार्थी यह अंतर समझते हैं, वृद्धि गुणक और वृद्धि दर का अर्थ बताते हैं और चरघातांकी वृद्धि को रैखिक मानने से बचते हैं या नहीं (विशेष रूप से चक्रवृद्धि ब्याज में)।

समस्या 1 - P रैखिक बनाम Q घातीय

- (ए) P प्रत्येक चरण में 3 जोड़ता है। Q को 2 से गुणा किया जाता है।
- (b) $P(x) = 10 + 3x$. $Q(x) = 10 \cdot 2^x$.
- (c) $P(10) = 40$ । $Q(10) = 10 \cdot 1024 = 10,240$. एकदम अलग.
- (d) ★ इकाई की केंद्रीय अंतर्दृष्टि: Q की परिवर्तन दर स्वयं बढ़ रही है (यह एक स्थिरांक है) लगातार बढ़ते आधार पर गुणक)। P का परिवर्तन की दर निश्चित है। अंततः, गुणात्मक वृद्धि हमेशा योगात्मक वृद्धि से आगे निकल जाती है।
- देखें: जो छात्र कहते हैं कि "Q शुरू से ही तेज है" वे वैचारिक बिंदु से चूक जाते हैं।

समस्या 2 - बैक्टीरिया का दोगुना होना

- (a) $B(t) = 50 \cdot 2^t$.
- (b) $B(5) = 50 \cdot 32 = 1600$.
- (c) $50 \cdot 2^t > 10,000 \rightarrow 2^t > 200$ को हल करें। $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ । तो 8 घंटों के बारे में।
- (d) जीवाणुओं को भोजन, जगह और ऑक्सीजन की कमी पड़ती है। घातीय मॉडल में वृद्धि की सीमा नहीं होती—इस सीमा को समझना ज़रूरी है। ★ मॉडलिंग साक्षरता.

समस्या 3 - औषधि क्षय

- (a) $D(t) = 80 \cdot (0.8)^t$.
- (b) क्षय कारक = 0.8। क्षय दर = 20% (i.e., 0.20)। गणित में दक्ष विद्यार्थी स्पष्ट: दर प्रतिशत परिवर्तन है; कारक वह है जिसके आधार पर आप गुणा करें करते हैं।
- (c) $D(4) = 80 \cdot (0.8)^4 = 80 \cdot 0.4096 \approx 32.8$ mg. $D(10) = 80 \cdot 0.1074 \approx 8.6$ mg.
- (d) गणितीय रूप से, $D(t)$ 0 तक पहुंचता है लेकिन कभी 0 तक नहीं पहुंचता है (0 पर स्पर्शान्मुख)। वास्तविक जीवन में, अंततः इतना पतला कि यह प्रभावी रूप से शून्य है, लेकिन घातीय मॉडल कभी भी बिल्कुल 0 तक नहीं पहुंचता है।

समस्या 4 — $f(x) = 3 \cdot 2^x$

- (ए) y-अंतःखंड = $f(0) = 3 \cdot 2^0 = 3$ । इस फॉर्म के फलनों के लिए गुणांक (3) y-अंतःखंड है।
- (b) $f(1) = 6$, $f(2) = 12$, $f(3) = 24$.
- (c) $f(-1) = 3 \cdot 1/2 = 1.5$ । $f(-2) = 3 \cdot 1/4 = 0.75$. नकारात्मक घातांक का अर्थ बार-बार "आधार द्वारा भाग दें" है।
- (d) ग्राफ़: आसानी से ऊपर की ओर मुड़ता हुआ; (0, 3), (1, 6), (2, 12), आदि से होकर गुजरता है। x घटने पर 0 तक पहुंचता है।
- ★ नकारात्मक घातांक एक इकाई 6 मील का पत्थर है - उन छात्रों के लिए देखें जो $f(-1) = -6$ लिखते हैं।

समस्या 5 - विवरण के साथ समीकरण का मिलान करें

- (ए) घातांकीय क्षय (आधार $1/2 < 1$), y-अंतःखंड 10, घटता हुआ।
- (b) घातीय वृद्धि (आधार $3 > 1$), y-अंतःखंड 5, बढ़ती हुई।
- (c) घातीय क्षय (आधार $0.95 < 1$), y-अंतःखंड 200, धीमी गति से कमी।
- (d) स्थिर फलन = 1 (आधार 1)।

समस्या 6 - 6% पर चक्रवृद्धि ब्याज

- (ए) वर्ष 1: \$1060। वर्ष 3: $1000(1.06)^3 \approx \$1191.02$ ।
- (b) $A(t) = 1000(1.06)^t$.
- (c) वास्तविक: $1000(1.06)^{10} \approx \$1790.85$, इसलिए ब्याज $\approx \$1790.85 - \$1000 = \$790.85$ - \$600 नहीं।
- (d) ★ कंपाउंडिंग का निदान. हान ने प्रत्येक वर्ष मूल में 6% जोड़ा (साधारण ब्याज)। बढ़ते शेष पर चक्रवृद्धि ब्याज 6% लगता है। हान इस अवधारणा को भूल जाता है: 'ब्याज पर ब्याज'।

समस्या 7 - क्रमिक छूट

- (ए) कुल छूट 30% नहीं है। 20% बंद होने के बाद: मूल का 0.8। फिर 10% उससे हटकर: $0.8 \times 0.9 = 0.72$ । कुल छूट = 28%, 30% नहीं।
- (b) अंतिम कीमत = \$72।
- ★ गुणक-बनाम-योगात्मक भेद - संयोजन के समान पाठ, भिन्न सेटिंग।

समस्या 8 - लगातार-अनुपात जासूस

- (a) $18/12 = 1.5$. $27/18 = 1.5$. $40.5/27 = 1.5$.
- (b) लगातार अनुपात $\rightarrow$ घातीय फलन विकास कारक 1.5 के साथ।
- (c) $y = 8 \cdot (1.5)^x$. (जाँच: $y(1) = 12$ ✓.)
- ★ संरचनात्मक निदान: समान अनुपात = घातीय। (तुलना करें: समान अंतर = रैखिक।)

समस्या 9 - घातांक नियम त्रुटियाँ

- (ए) प्रिया गलत है। 5^x का अर्थ है $5 \cdot 5 \cdot 5 \dots 5$ (x बार), $5 \cdot x$ नहीं। काउंटर: $5^3 = 125$, 15 नहीं।
- (b) माई गलत है। समान आधार: जोड़ें घातांक। $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$, 2^{12} नहीं।
- (c) डिएगो गलत है। एक शक्ति की शक्ति: गुणा करें घातांक. $(3^2)^4 = 3^8$.
- ★ तीन क्लासिक घातांक-नियम त्रुटियाँ। प्रत्येक एक गलत प्रयोग है; सही नियम को स्पष्ट रूप से समझाना है लक्ष्य.

समस्या 10 - \$1000/माह बनाम दोगुना पैसा

- (ए) परिदृश्य ए: \$30,000 30 दिनों में। परिदृश्य B: कुल = $2^{30} - 1$ सेंट $\approx \$10,737,418$ - बेतहाशा बढ़ा। दोहरीकरण आसानी से जीत जाता है।
- (b) सशक्त: "घातीय वृद्धि धीमी गति से शुरू होती है लेकिन नाटकीय रूप से तेज हो जाती है; यहां तक कि छोटी मात्रा भी बड़ी संख्या में बदल जाती है।" कमज़ोर: केवल A को चुनता है क्योंकि "\$1000/माह अधिक लगता है।"
- ★ सबसे यादगार घातीय-विकास पाठ; 'अहा' की जाँच करें।