

त्वरित 7 • इकाई 6 • मूल्यांकन मार्गदर्शिका

फ़ंक्शंस और आयतन

अभिभावक या शिक्षक के लिए — क्या देखें

इकाई 6 औपचारिक रूप से फलनों का परिचय देती है और उन्हें वॉल्यूम पर लागू करती है। बड़ा विचार: एक फलन प्रत्येक इनपुट के लिए एक आउटपुट निर्दिष्ट करता है। देखें कि क्या छात्र इस बात की सराहना करते हैं कि रैखिक फलन एक विशेष, सरल प्रकार के फलन हैं - और यह कि आयतन सूत्र त्रिज्या के गैर-रैखिक फलन हैं।

समस्या 1 — यह फलन है या नहीं?

- (ए) कोई समारोह नहीं - कई लोग जन्मदिन साझा करते हैं।
- (b) फ़ंक्शन - प्रत्येक राज्य की बिल्कुल एक राजधानी है।
- (c) कोई फ़ंक्शन नहीं है - अधिकांश धनात्मक संख्याएँ में दो वर्गमूल होते हैं (e.g., $9 \rightarrow 3$ और -3)।
- विवेचक: "एक इनपुट, एक आउटपुट।" मजबूत छात्र प्रतिउदाहरण प्रस्तुत कर सकते हैं (एक ही इनपुट दो आउटपुट देता है)।

समस्या 2 — Apple फ़ंक्शन

- (a) $f(n) = 0.75n$.
- (b) $f(8) = \$6.00$, 8 सेब की कीमत।
- (c) $f(n) = 6 \rightarrow n = 8$ सेब। "कितने सेबों की कीमत \$6 है?"
- सशक्त: फ़ंक्शन का मूल्यांकन करने ($f(8)$) और हल करने ($f(n) = 6$ के साथ n ढूँढ़ें) के बीच अंतर करता है। ये अलग-अलग मानसिक चालें हैं।

समस्या 3 - रैखिक बनाम गैर-रैखिक

- (ए) रैखिक: $y = 2x - 5$ ।
- (b) गैर-रैखिक: $y = x^2$ (द्विघात)।
- (c) गैर-रैखिक: y प्रत्येक चरण को दोगुना करता है (3, 6, 12, 24); विकास दर बढ़ती है। घातीय पैटर्न।
- (d) रैखिक (कोई भी सीधी रेखा रैखिक होती है)।
- मुख्य विचार: रैखिक का अर्थ परिवर्तन की स्थिर दर है। दक्ष विद्यार्थी सारणियों में अंतरों की जाँच करते हैं; कमज़ोर विद्यार्थी मान लेते हैं कि y बढ़ने का अर्थ रैखिक होना है।

समस्या 4 - दूरी बनाम समय ग्राफ

- आकार: ऊपर की ओर जाने वाली रेखा (स्थिर चलना), क्षैतिज खंड (विश्राम), फिर नीचे की ओर जाने वाली तेज रेखा (शुरू करने के लिए वापस दौड़ना)।
- डायनोस्टिक: क्या वे मानते हैं कि लौटने का मतलब दूरी कम हो जाती है - ग्राफ़ ढलान नीचे?
- मजबूत: लेबल अक्ष (x पर समय, y पर दूरी) और चलने बनाम दौड़ने के लिए अलग ढलान का उपयोग करता है।

समस्या 5 - सिलेंडर आयतन

- (a) $V = \pi r^2 h = \pi(9)(5) = 45\pi \text{ m}^3$.
- (b) दोहरीकरण त्रिज्या: $V = \pi(36)(5) = 180\pi$. गुणनखंडन = 4 (क्योंकि r वर्ग है)।
- (c) दोगुनी ऊँचाई: $V = \pi(9)(10) = 90\pi$. गुणनखंड = 2 (ऊँचाई रैखिक है)।
- निदान: क्या वे मानते हैं कि त्रिज्या को दोगुना करने से आयतन को दोगुना करने से दोगुना नहीं, बल्कि चौगुना हो जाता है? यह इकाई में सबसे महत्वपूर्ण गैर-रेखीय स्केलिंग अंतर्दृष्टि है।

समस्या 6 - शंकु बनाम सिलेंडर

- (ए) सिलेंडर: $V = \pi(16)(9) = 144\pi \text{ cm}^3$ ।
- (b) शंकु: $V = (1/3)\pi(16)(9) = 48\pi \text{ cm}^3$.

- (c) अनुपात = $1/3$. शंकु सूत्र में $(1/3)$ कारक होता है क्योंकि समान आधार और ऊंचाई के तीन शंकु एक सिलेंडर को भरते हैं।
- सशक्त: $1/3$ संबंध को एक तथ्य के रूप में बताता है; यहां तक कि मजबूत छात्र भी व्यावहारिक औचित्य का वर्णन कर सकते हैं।

समस्या 7 - क्षेत्र आयतन स्केलिंग

- (a) $V_1 = (4/3)\pi(125) = 500\pi/3 \text{ cm}^3$. $V_2 = (4/3)\pi(1000) = 4000\pi/3 \text{ cm}^3$.
- (b) 8 का गुणनखंड ($V_2/V_1 = 8$)। चूंकि त्रिज्या दोगुना हो गया, आयतन का मान $2^3 = 8$ से बढ़ गया।
- (c) सामान्य नियम: त्रिज्या $\times k$ को गुणा करने पर आयतन $\times k^3$ को गुणा किया जाता है।
- यह सभी 3 D आकृतियों को सामान्यीकृत करता है: k द्वारा रैखिक स्केलिंग $\rightarrow k^3$ द्वारा आयतन स्केल। एक प्रमुख बीजगणित 1 तत्परता विचार।

समस्या 8 - रैखिक बनाम द्विघात ग्राफ़

- $y = mx + b$ रैखिक है क्योंकि चर केवल पहली शक्ति तक ही प्रकट होता है; परिवर्तन की दर स्थिर है।
- $A = \pi r^2$ गैर-रेखीय (द्विघात) है - A , r की तुलना में तेजी से बढ़ता है; r के साथ परिवर्तन की दर बढ़ती है।
- सशक्त: स्पष्ट रूप से "चर की डिग्री" को ग्राफ़ के आकार से जोड़ता है।

समस्या 9 - घन दोहरीकरण

- 2-cm घन: $V = 8 \text{ cm}^3$ । 4-cm घन: $V = 64 \text{ cm}^3$ ।
- आयतन फैक्टर 8 (2^3) से बढ़ा है, फैक्टर 2 से नहीं।
- सारा गलत है - प्रत्येक पक्ष को दोगुना करने से आयतन $\times 2^3 = 8$ गुणा हो जाता है।
- यह समस्या क्लासिक और क्रिटिकल है। कई छात्र सोचते हैं दोगुना करना = दोगुना करना। इस अंतर्दृष्टि के बिना, ज्यामिति और विज्ञान में स्केलिंग समस्याएं विफल हो जाती हैं।

समस्या 10 - कागज को दो तरह से रोल किया गया

- आयतन समान होना आवश्यक नहीं! 8.5×11 के कागज़ पर विचार करें। लपेटने पर परिधि 8.5 हो तो: $r \approx 1.35$, $h = 11$. $V \approx 63.3$ घन इंच।
- वृत्त की परिधि 11 के साथ रोल्ड: $r \approx 1.75$, $h = 8.5$ । $V \approx 81.7$ घन इंच।
- वही पृष्ठीय क्षेत्रफल (पेपर) लेकिन अलग-अलग वॉल्यूम, क्योंकि $r^2 h$ के सिकुड़ने की तुलना में तेजी से बढ़ता है।
- सशक्त: सूत्र $V = \pi r^2 h$ का उपयोग करता है और देखता है कि r वर्ग है लेकिन h रैखिक है।

समस्या 11 - शंकु स्थिर दर पर भरना

- रैखिक नहीं. जैसे-जैसे पानी बढ़ता है, क्रॉस-सेक्शनल क्षेत्रफल बढ़ता है (शंकु चौड़ा होता है), इसलिए पानी का वही आयतन जल स्तर को कम बढ़ाता है।
- ग्राफ़: पानी की ऊंचाई पहले तेजी से बढ़ती है (संकीर्ण भाग), फिर बढ़ने पर धीमी हो जाती है।
- डायग्नोस्टिक: जो छात्र एक सीधी रेखा खींचते हैं, उन्होंने ज्यामिति को फलन व्यवहार से नहीं जोड़ा है।